ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

Α2. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 13

Α3. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Β1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 85

Β2. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδες 86 – 87

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού είναι πολωνυμική.

$f(x) = \alpha x(2-x) = 2\alpha x - \alpha x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\alpha - 2\alpha x$

Πρέπει $f'(0) = \varepsilon\varphi 45^o \quad \Leftrightarrow \quad f'(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$

Β.

Για $\alpha = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ με $f'(x) = 1 - x$

α.

Είναι $f(1) = \frac{1}{2}$ και $f'(1) = 0$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

β.

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f΄		+	0	–	
f		↗	|	↘	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Από το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων έχουμε ότι

$F_2 = 30\%$ και $F_1 = 10\%$

Οπότε από τη σχέση $F_2 = F_1 + f_2$ προκύπτει ότι $30\% = 10\% + f_2 \Leftrightarrow$

$f_2 = 20\%$

Δηλαδή η σχετική % συχνότητα της κλάσης $[12, 14)$ είναι $f_2 = 20\%$

Δίνεται ότι αυτό το ποσοστό αντιστοιχεί σε 10 μαθητές. Οπότε αν ν είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε $\frac{20}{100} \cdot \nu = 10 \Leftrightarrow \nu = 50$

β.

Αν από το 50% φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα, η ευθεία αυτή θα τμήση το πολύγωνο του ιστογράμματος σε ένα σημείο του οποίου η τετμημένη είναι 15 όπως εύκολα βλέπουμε από το σχήμα .

Επομένως $\delta = 15$

γ.

Οι σχετικές συχνότητες των κλάσεων βρίσκονται ως εξής

Είναι $f_1 = F_1 = 10\%$

$f_2 = F_2 - F_1 = 30 - 10 = 20\%$

$f_3 = F_3 - F_2 = 70 - 30 = 40\%$

$f_4 = F_4 - F_3 = 90 - 70 = 20\%$

$f_5 = F_5 - F_4 = 100 - 90 = 10\%$

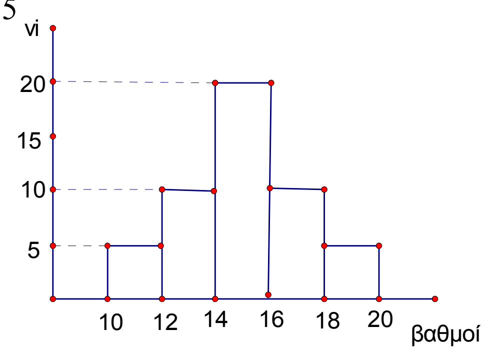
Από το (α) βρήκαμε ότι το 20% του δείγματος αντιστοιχεί σε 10 μαθητές.

Οπότε το 10% θα αντιστοιχεί σε 5 μαθητές επομένως $\nu_1 = 5$

το 40% θα αντιστοιχεί σε 20 μαθητές επομένως $\nu_3 = 20$

και $\nu_2 = 10$, $\nu_4 = 10$ και $\nu_5 = 5$

Ιστόγραμμα των συχνοτήτων



δ.

Το ενδεχόμενο Κ : Ο μαθητής έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 πραγματοποιείται όταν ο μαθητής βρίσκεται στην τελευταία κλάση K_5 ή στην προτελευταία K_4.

Επειδή τα ενδεχόμενα : ο μαθητής βρίσκεται στην κλάση K_5 και ο μαθητής βρίσκεται στην κλάση K_4 είναι ασυμβίβαστα, θα έχουμε ότι

$$P(K) = P(K_4) + P(K_5) = \frac{10}{50} + \frac{5}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

Ο τύπος $P(k) = \frac{1}{k}$ **δεν** είναι κατάλληλος διότι με βάση αυτόν έχουμε

$$P(1) = 1\ ,\quad P(2) = \frac{1}{2}\ ,\quad P(3) = \frac{1}{3}\ ,\quad P(6) = \frac{1}{6}$$

και επομένως $P(\Omega) = P(1\ ) + P(2) + P(3) + P(6) =$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2 > 1 \quad \text{πράγμα άτοπο}$$

Ο τύπος $P(k) = \frac{1}{2^k}$ **δεν** είναι κατάλληλος διότι με βάση αυτόν έχουμε

$$P(1) = \frac{1}{2}\ ,\quad P(2) = \frac{1}{4}\ ,\quad P(3) = \frac{1}{8}\ ,\quad P(6) = \frac{1}{64}$$

και επομένως $P(\Omega) = P(1\ ) + P(2) + P(3) + P(6) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} < 1 \ \text{πράγμα άτοπο}$$

Τέλος ο τύπος $P(k) = \frac{1}{2k}$ **είναι κατάλληλος**, αφού με βάση αυτόν έχουμε

$$P(1) = \frac{1}{2}\ ,\quad P(2) = \frac{1}{4}\ ,\quad P(3) = \frac{1}{6}\ ,\quad P(6) = \frac{1}{12}$$

και επομένως $P(\Omega) = P(1\ ) + P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$

Β.

α.

Για να είναι η επικρατούσα τιμή το 3 θα πρέπει η παρατήρηση 3 να έχει την μεγαλύτερη συχνότητα . Αυτό συμβαίνει όταν $k = 2$ ή $k = 3$ ή $k = 6$

Οπότε $A = \{2,\ 3,\ 6\}$ και $P(2) = \frac{1}{4}$, $P(3) = \frac{1}{6}$, $P(6) = \frac{1}{12}$

$$\overline{x} = 2{,}5 \iff \frac{1+1+7+k+k+3+3+3}{8} = 2{,}5 \iff 18 + 2k = 20 \iff k = 1$$

Άρα $B = \{1\}$ με $P(1) = \frac{1}{2}$

β.

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(1) = \frac{1}{2}$$

Προφανώς τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα, οπότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$